DE HAAGSE HOGESCHOOL
Technology, Innovation & Society Delft

VOORBLAD SCHRIFTELIJKE TOETSEN

OPLEIDING	Me
TOETSCODE	MeWIS1-T1
GROEP	MeP1
TOETSDATUM	7 november 2011
TIJD	13.00 – 14.30 uur
AANTAL PAGINA'S (incl. dit voorblad)	6
DEZE TOETS BESTAAT UIT (aantal)	7 open vragen
GEBRUIK HULPMIDDELEN	JA/~~NEE~~
TOEGESTANE HULPMIDDELEN	Een grafische rekenmachine
OVERIGE OPMERKINGEN	Laat je berekeningen zien! Alleen een antwoord is geen punten waard! Geef altijd exacte antwoorden tenzij anders vermeld in de vraag! Cijfer = totaal punten/10 met minimum 1
OPSTELLER VAN DEZE TOETS	Roel Smit
NAAM 2E LEZER	Jan Lambers

Machten:

voor alle $a, b > 0$ geldt:

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$
$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$
$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$
$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$
$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$
$$(a^p)^q = a^{pq}$$

Logaritmen:

Voor alle $g > 0$ en $g \neq 1$ en alle $a, b > 0$ geldt:

$$^g\log ab = {}^g\log a + {}^g\log b$$
$$^g\log \frac{a}{b} = {}^g\log a - {}^g\log b$$
$$^g\log a^q = q \cdot {}^g\log a \ \ (q \in \mathbb{R})$$
$$^g\log a = \frac{^p\log a}{^p\log g} \ (p > 0 \text{ en } p \neq 1)$$

ABC-formule

Het oplossen van $ax^2 + bx + c = 0$, waarbij

$a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$.

Discriminant $D = b^2 - 4ac$.

Als $D \geq 0$ dan $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Als $D < 0$ dan geen reële oplossingen.

Goniometrische formules

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\sin x = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos x \pm \cos x \cdot \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$$
$$\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x$$
$$\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 - 1$$
$$= 1 - 2(\sin x)^2$$
$$(\cos x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
$$(\sin x)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x - y)\right)$$
$$\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{1}{2}(x - y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x + y)\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x - y)\right)$$
$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - y)\right)$$
$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$
$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$$
$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$$

Goniometrische vergelijkingen

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k \cdot 2\pi \lor x$$
$$= \pi - \alpha + k \cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$
$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k \cdot 2\pi \lor x$$
$$= -\alpha + k \cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$
$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Cyclometrische functies

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x \text{ en } y \in \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$$
$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x \text{ en } y \in [0, \pi]$$
$$y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x \text{ en } y \in \left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$$

Graden en Radialen

$$\alpha \text{ rad} \triangleq \left(\alpha \cdot \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad \alpha^{\circ} \triangleq \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

Vraag 1: **(10 + 10 + 10 + 10 PUNTEN)**

Los x op uit de volgende vergelijkingen (geef ***alle*** correcte oplossingen)

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} > 4^{2x+4}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} > 4^{2x+4}$	
$2^{-x+3} > 2^{4x+8}$	
$-x+3 > 4x+8$	
$-5x > 5$	
$x < -1$	

b) $|x-2| = \sqrt{x}$

$\lvert x-2\rvert = \sqrt{x}$	
$\lvert x-2\rvert^2 = x$	
$x^2-4x+4 = x$	
$x^2-5x+4=0$	
$(x-1)(x-4)=0$	
$x=1 \lor x=4$	
Controle: $x=4$ alleen	

c) $(\sin x)\cdot(\cos x) = \frac{1}{4}$ op het interval $x \in [0,2\pi]$

$(\sin x)\cdot(\cos x) = \frac{1}{4}$	
$2\cdot(\sin x)\cdot(\cos x) = \frac{1}{2}$	
$\sin 2x = \frac{1}{2}$	
$\sin 2x = \sin\frac{\pi}{6}$	
$\sin\alpha = \sin\beta \Rightarrow \alpha = \beta + k\cdot 2\pi \lor \alpha = \pi - \beta + k\cdot 2\pi$	
$2x = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi \lor 2x = \frac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi$	
$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \lor x = \frac{5}{12}\pi + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$	
$x \in \left\{\frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi\right\}$	

d) $2x^2 + 10x + 14 = 0$

$2x^2 + 10x + 14 = 0$	
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	
$b^2 - 4ac = 100 - 4 \cdot 2 \cdot 14 = 100 - 112 = -12$	
Heeft geen oplossingen	

Vraag 2: **(5 + 5 PUNTEN)**

Gegeven is de functie:

$$f : x \to \arcsin\left({}^2\log(4x - 1)\right)$$

a) Bepaal de drie functies waaruit f is samengesteld.

$u = g(x) = 4x - 1$	
$v = h(u) = {}^2\log u$	
$w = j(v) = \arcsin v$	

b) Bepaal het domein van de functie f

$w = j(v) = \arcsin v$	$-1 \le v \le 1$	
$v = h(u) = {}^2\log u$	$-1 \le v \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le u \le 2$	
$u = g(x) = 4x - 1$	$\frac{1}{2} \le u \le 2 \Rightarrow \frac{3}{8} \le x \le \frac{3}{4}$	

Vraag 3: **(10 PUNTEN)**

Planeten draaien in een vrijwel cirkelvormige baan om de zon. De aarde doet daar een jaar over. Op andere planeten duurt de omlooptijd veel korter of langer. De sterrenkundige Keppler heeft ontdekt hoe de omlooptijd van de planeten afhangen van de afstand tot de zon. De zogenaamde "derde wet" van Keppler luidt als volgt:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

Hierin zijn T_1 en T_2 de omlooptijden en r_1 en r_2 de (gemiddelde) afstand tot de zon van de twee planeten.
De gemiddelde afstand van de aarde tot de zon bedraagd $1{,}5 \cdot 10^8$ km. Geef nu een formule waarmee berekend kan worden hoe lang een 'jaar' (een omlooptijd ten opzichte van de zon) op een willekeurige planeet duurt.

$T_1^2 = \left(\dfrac{r_1}{1{,}5 \cdot 10^8}\right)^3$	

$T_1 = 5{,}44 \cdot 10^{-13} \times r_1^{\left(\frac{3}{2}\right)}$	

Vraag 4: **(10 PUNTEN)**

Gegeven het volgende:

$$\cos x = \frac{1}{4}$$

Bereken de ***exacte*** waarde van $\cos(2x)$. Geef duidelijk aan welke goniometrische formules je gebruikt.

$\cos x = \frac{1}{4}$	
$\cos 2x = 2\,(\cos x)^2 - 1$	
$2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1$	
$\frac{1}{8} - 1$	
$-\frac{7}{8}$	

Vraag 5: **(10 PUNTEN)**

Gegeven de ΔABC met $c = 12$, $a = 6$ en $\alpha = 15°$. Ga ervan uit dat β een scherpe hoek is. Bereken β in twee decimalen nauwkeurig. (Hint: maak voor jezelf een tekening.)

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$	
$\frac{6}{\sin 15°} = \frac{12}{\sin\gamma}$	
$\gamma = 31{,}17° \vee \gamma = 148{,}83°$	
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$	
$\beta = 16{,}17°$	

voor het berekenen van de stompe hoek: 5 punten

Vraag 6: **(10 PUNTEN)**

Gegeven de grafiek van de functie

$$f: x \to 2\sin(2x - \pi) + 2$$

Laat zien hoe de grafiek van f ontstaat uit die van g met

$$g: x \to \sin x$$

$\sin x$		
$\sin 2x$	Vermenigvuldig tov y-as met 1/2	
$\sin\left(2\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)\right)$	Verschuif met ½ pi naar rechts	
$2\sin\left(2\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)\right)$	Vermenigvuldig met 2 tov x-as	
$2\sin\left(2\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)\right)+2$	Verschuif 2 naar boven	

Vraag 7: **(10 PUNTEN)**

Gegeven de formule voor y als:

$$y = f(x) = \ln\left(\sqrt{x-1}\right)$$

Bepaal de inverse functie.

$y = \ln\left(\sqrt{x-1}\right)$	
$e^y = \sqrt{x-1}$	
$(e^y)^2 = x-1$	
$e^{2y} = x-1$	
$x = e^{2y}+1$	