DE HAAGSE HOGESCHOOL

Technology, Innovation & Society Delft

VOORBLAD SCHRIFTELIJKE TOETSEN

OPLEIDING	**Me**
TOETSCODE	**MeWIS2-T1**
GROEP	**MeP2**
TOETSDATUM	**05 april 2012**
TIJD	**13.00 – 14.30 uur**
AANTAL PAGINA'S (incl. dit voorblad)	**5**
DEZE TOETS BESTAAT UIT (aantal)	**5 open vragen**
GEBRUIK HULPMIDDELEN	**JA/~~NEE~~**
TOEGESTANE HULPMIDDELEN	**Een grafische rekenmachine**
OVERIGE OPMERKINGEN	**Laat je berekeningen zien! Alleen een antwoord is geen punten waard! Geef altijd exacte antwoorden tenzij anders vermeld in de vraag! Cijfer = totaal punten/10 met minimum 1**
OPSTELLER VAN DEZE TOETS	**Roel Smit**
NAAM 2E LEZER	**Jan Lambers**

Belangrijkste punten uit artikel 12 van de Onderwijs- en examenregeling:
- Je dient je via Osiris ingeschreven te hebben voor de toets
- Schrijf je naam, studentnummer, toetscode en naam van de docent meteen op het tentamenpapier
- Leg je identificatiebewijs op de hoek van de tafel
- Zet alle elektronische communicatiemiddelen (mobiel, PDA, etc.) uit en stop deze in je tas; deze mogen niet als calculator of klok worden gebruikt
- Je mag het lokaal het eerste halfuur niet verlaten
- Volg de instructies op het toetsvoorblad
- Steek je hand op als je een vraag hebt

DE HAAGSE HOGESCHOOL

Technology, Innovation & Society Delft

Machten:

voor alle $a, b > 0$ geldt:

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

Logaritmen:

Voor alle $g > 0$ en $g \neq 1$ en alle $a, b > 0$ geldt:

$${}^g\log ab = {}^g\log a + {}^g\log b$$

$${}^g\log \frac{a}{b} = {}^g\log a - {}^g\log b$$

$${}^g\log a^q = q \cdot {}^g\log a \ \ (q \in \mathbb{R})$$

$${}^g\log a = \frac{{}^p\log a}{{}^p\log g} \ (p > 0 \text{ en } p \neq 1)$$

ABC-formule

Het oplossen van $ax^2 + bx + c = 0$, waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$.

Discriminant $D = b^2 - 4ac$.

Als $D \geq 0$ dan $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Als $D < 0$ dan geen reële oplossingen.

Goniometrische formules

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos x \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 - 1$$
$$= 1 - 2(\sin x)^2$$

$$(\cos x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$(\sin x)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

Goniometrische vergelijkingen

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k \cdot 2\pi \vee x$$
$$= \pi - \alpha + k \cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k \cdot 2\pi \vee x$$
$$= -\alpha + k \cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Cyclometrische functies

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x \text{ en } y \in \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$$

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x \text{ en } y \in [0, \pi]$$

$$y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x \text{ en } y \in \left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$$

Graden en Radialen

$$\alpha \text{ rad} \triangleq \left(\alpha \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ \qquad \alpha^\circ \triangleq \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

Cosinus en sinusregel

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \alpha$$

Technology, Innovation & Society Delft

Differentiaalrekening

Rekenregels

$$\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot f'(x) \text{ met } c\in\mathbb{R}$$

$$\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)' = \alpha f'(x)+\beta g'(x) \text{ met } \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$f\left(g(x)\right)' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$$

Standaardafgeleiden

$$f(x)=c \Rightarrow f'(x)=0$$

$$f(x)=x^\alpha \Rightarrow f'(x)=\alpha\cdot x^{\alpha-1} \text{ met } \alpha\in\mathbb{R}$$

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$$

$$f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$$

$$f(x)=\tan x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$$

$$f(x)=a^x \Rightarrow f'(x)=a^x\ln x$$

$$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$f(x)={}^a\log x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$$

$$f(x)=\arcsin x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x)=\arccos x \Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x)=\arctan x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Integraalrekening

Rekenregels

$$\int_a^b\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_{x=a}^b f(x)dg(x) = [f(x)g(x)]_{x=a}^b-\int_{x=a}^b g(x)df(x)$$

Standaard integralen

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \text{ met } \alpha\neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x+C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x+C$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|+C$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}dx = \tan x+C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \text{ met } a>0 \text{ en } a\neq -1$$

$$\int e^x dx = e^x+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

Complexe getallen

Drie schrijfwijzen voor een complex getal:

1. $z=x+iy$
2. $z=r(\cos\phi+i\sin\phi)$ met $r=\sqrt{x^2+y^2}$ en $\tan\phi=y/x$
3. $z=re^{i\phi}$, $e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$ (Euler)

Rekenen met complexe getallen

Stel $z_1=a+bi$ en $z_2=c+di$

$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$$

$$z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Stel $z_1=r_1e^{i\phi_1}$ en $z_2=r_2e^{i\phi_2}$

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{i(\phi_1+\phi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\phi_1-\phi_2)}$$

Het oplossen van vergelijkingen in $\mathbb{C}$

1. $az^2+bz+c=0$ met $a,b,c\in\mathbb{R}$ en $a\neq 0$

   Discriminant $D=b^2-4ac$

   a. $D\geq 0$ dan $z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

   b. $D<0$ dan $z_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a}$

2. $z^n=c$ met $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ en $c\in\mathbb{C}$:

   $z_k=\sqrt[n]{|c|}e^{i\left(\frac{\arg(c)}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k=0$ t/m $n-1$

Vraag 1: **(5 + 10 + 10 PUNTEN)**

Los op in $\mathbb{C}$ (geef alle oplossingen)

a) Schrijf $\sqrt{8} \cdot e^{i\pi/4}$ in de vorm $z = x + iy$

b) $z^2 + 2z + 3 = 0$

c) $\frac{23+27i}{3+5i}$

Vraag 2: **(10 + 10 PUNTEN)**

Bepaal de derde afgeleide van

a) $f(t) = t^2 \sin t$

b) $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Vraag 3: **(10 + 10 + 10 PUNTEN)**

Bepaal de volgende bepaalde en onbepaalde integralen:

a) $\int_0^{\pi} x \sin(x^2)\, dx$

b) $\int_0^{\pi} x \sin(x+1)\, dx$

c) $\int \ln x \; dx$

Vraag 4: **(15 PUNTEN)**

Voer een volledig functieonderzoek uit voor de functie

$$f(x) = -x^4 - 4x^2 + 5$$

Vraag 5: **(10 PUNTEN)**

Gegeven de functie $y = f(x)$ met $-4 \leq x \leq 4 \ \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 2$
Teken de grafiek en gebruik daarbij de onderstaande gegevens:

- f is een oneven functie
- $f(-4) = -\frac{3}{2}$
- $f(0) = f''(0) = 0$
- Voor alle x in het domein geldt: $f'(x) < 0$
- $\lim_{x \downarrow 2} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \uparrow 2} f(x) = -\infty$