

VOORBLAD SCHRIFTELIJKE TOETSEN

OPLEIDING	Me
TOETSCODE	MeWIS3-T1
GROEP	MeP2
TOETSDATUM	05 april 2012
TIJD	13.00 – 14.30 uur
AANTAL PAGINA'S (incl. dit voorblad)	4
DEZE TOETS BESTAAT UIT (aantal)	4 open vragen
GEBRUIK HULPMIDDELEN	JA/NEE
TOEGESTANE HULPMIDDELEN	Een grafische rekenmachine
OVERIGE OPMERKINGEN	Laat je berekeningen zien! Alleen een antwoord is geen punten waard! Geef altijd exacte antwoorden tenzij anders vermeld in de vraag! Cijfer = totaal punten/10 met minimum 1
OPSTELLER VAN DEZE TOETS	Roel Smit
NAAM 2^E LEZER	Theo Koreneef

Belangrijkste punten uit artikel 12 van de Onderwijs- en examenregeling:

- Je dient je via Osiris ingeschreven te hebben voor de toets
- Schrijf je naam, studentnummer, toetscode en naam van de docent meteen op het tentamenpapier
- Leg je identificatiebewijs op de hoek van de tafel
- Zet alle elektronische communicatiemiddelen (mobiel, PDA, etc.) uit en stop deze in je tas; deze mogen niet als calculator of klok worden gebruikt
- Je mag het lokaal het eerste halfuur niet verlaten
- Volg de instructies op het toetsvoorblad
- Steek je hand op als je een vraag hebt

voor alle $a, b > 0$ geldt:

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

Logaritmen:

Voor alle $g > 0$ en $g \neq 1$ en alle $a, b > 0$ geldt:

$${}^g\log ab = {}^g\log a + {}^g\log b$$

$${}^g\log \frac{a}{b} = {}^g\log a - {}^g\log b$$

$${}^g\log a^q = q \cdot {}^g\log a \quad (q \in \mathbb{R})$$

$${}^g\log a = \frac{{}^p\log a}{{}^p\log g} \quad (p > 0 \text{ en } p \neq 1)$$

ABC-formule

Het oplossen van $ax^2 + bx + c = 0$, waarbij

$a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$.

Discriminant $D = b^2 - 4ac$.

Als $D \geq 0$ dan $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Als $D < 0$ dan geen reële oplossingen.

Goniometrische formules

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 - 1 \\ &= 1 - 2(\sin x)^2 \end{aligned}$$

$$(\cos x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$(\sin x)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

Goniometrische vergelijkingen

$$\begin{aligned} \sin x = \sin \alpha &\Leftrightarrow x = \alpha + k \cdot 2\pi \vee x \\ &= \pi - \alpha + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x = \cos \alpha &\Leftrightarrow x = \alpha + k \cdot 2\pi \vee x \\ &= -\alpha + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Cyclometrische functies

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x \text{ en } y \in \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$$

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x \text{ en } y \in [0, \pi]$$

$$y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x \text{ en } y \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$$

Graden en Radialen

$$\alpha \text{ rad} \triangleq \left(\alpha \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ \quad \alpha^\circ \triangleq \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

Cosinus en sinusregel

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Rekenregels

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \text{ met } c \in \mathbb{R}$$

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \text{ met } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Standaardafgeleiden

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = x^\alpha \Rightarrow f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \text{ met } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = {}^a \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Integraalrekening

Rekenregels

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_{x=a}^b f(x) dg(x) = [f(x)g(x)]_{x=a}^b - \int_{x=a}^b g(x) df(x)$$

Standaard integralen

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \text{ met } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \text{ met } a > 0 \text{ en } a \neq -1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Complexe getallen

Drie schrijfwijzen voor een complex getal:

1. $z = x + iy$

2. $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ met $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
en $\tan \phi = y/x$

3. $z = r e^{i\phi}$, $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ (Euler)

Rekenen met complexe getallen

Stel $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Stel $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$ en $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$$

Het oplossen van vergelijkingen in \mathbb{C}

1. $az^2 + bz + c = 0$ met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$

Discriminant $D = b^2 - 4ac$

a. $D \geq 0$ dan $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

b. $D < 0$ dan $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$

2. $z^n = c$ met $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ en $c \in \mathbb{C}$:

$$z_k = \sqrt[n]{|c|} e^{i\left(\frac{\arg(c)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k = 0 \text{ t/m } n-1$$

Vraag 1:

(5 + 5 + 10 + 10 PUNTEN)

Los op in \mathbb{C} (geef alle oplossingen):

a) $(2 + i)(6 + 3i)$

b) $\frac{5+3i}{2+i}$

c) $(2 + 2i)^8$

d) $z^3 = 8$

Vraag 2:

(10 PUNTEN)

Bepaal de derde afgeleide van:

$$f(t) = \tan(2t)$$

Vraag 3:

(3 * 10 PUNTEN)

Bepaal de volgende bepaalde en onbepaalde integralen:

a) $\int_1^2 \frac{6x^2+4x}{x^3+x^2+8} dx$

b) $\int z^7 \ln z dz$

c) $\int \frac{1}{t \ln^2 t} dt$

Vraag 4:

(15 + 15 PUNTEN)

Voer een volledig functieonderzoek uit voor de volgende functies:

a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

b) $g(x) = x + \sin(2x + \pi)$ waarbij $x \in [0, \pi]$