Technology, Innovation & Society Delft

VOORBLAD SCHRIFTELIJKE TOETSEN

OPLEIDING	**: MECHATRONICA**
TOETSCODE	**: MECH5-T1 OEFENTOETS**
GROEP	**: MEH2**
TOETSDATUM	**: 01/04/2013**
TIJD	**: 13.00 – 14.30 (nvt)**
AANTAL PAGINA'S (incl. voorblad)	**: 4**
DEZE TOETS BESTAAT UIT	**: 5 open vragen**
GEBRUIK HULPMIDDELEN	**: JA**
TOETSOPGAVE INLEVEREN	**: NEE**
TOEGESTANE HULPMIDDELEN	**: Een (grafische) rekenmachine**
OVERIGE OPMERKINGEN	**: Laat duidelijk zien met welke stappen je tot het antwoord bent gekomen! Het maximaal aantal behaalbare punten per vraag is bij elke vraag tussen haakjes aangegeven. Het eindcijfer wordt berekend met de volgende formule:** **Cijfer = max(1, aantal punten / 10)**
OPSTELLER VAN DEZE TOETS	**: P.R. Fraanje**
TWEEDE LEZER VAN DEZE TOETS	**: nvt.**

BELANGRIJKSTE PUNTEN UIT ARTIKEL 12 VAN DE ONDERWIJS- EN EXAMENREGELING:

- je dient je via Osiris ingeschreven te hebben voor deze toets
- schrijf je naam, je studentnummer, de toetscode en de naam van de docent meteen op het tentamenpapier
- leg je identiteitsbewijs op de hoek van de tafel
- zet alle elektronische communicatiemiddelen (mobiele telefoon, PDA, etc.) uit en stop deze in je tas; deze mogen niet als calculator of klok worden gebruikt
- je mag het lokaal het eerste halfuur niet verlaten
- volg de instructies op het toetsvoorblad
- steek je hand op als je een vraag hebt

FORMULEBLAD TRILLINGEN

Vrije Ongedempte Trilling

Standaardvorm: $\ddot{x}+\omega_n^2\cdot x=0$ met $\omega_n=\sqrt{k/m}$

Standaardoplossing 1: $x(t)=A\cdot\mathbf{sin}\,\omega_n\cdot t+B\cdot\mathbf{cos}\,\omega_n\cdot t$

Standaardoplossing 2: $x(t)=C\cdot\mathbf{sin}(\omega_n\cdot t+\phi)$ met $C=\sqrt{A^2+B^2}$ en $\phi=\mathbf{tan}^{-1}(B/A)$

Periode en Frequentie: $\tau=2\pi/\omega_n$ **[sec]** en $f=1/\tau$ [Hz]

Ongedempte gedwongen trilling met periodieke kracht $F_0\cdot\mathbf{sin}\,\omega\cdot t$ (F_0 = mrω^2 bij onbalans)

Standaardvorm: $\ddot{x}+\omega_n^2\cdot x=(F_0/m)\cdot\mathbf{sin}\,\omega\cdot t$ met $\omega_n=\sqrt{k/m}$

Standaardoplossing: $x(t)=A\cdot\mathbf{sin}\,\omega_n\cdot t+B\cdot\mathbf{cos}\,\omega_n\cdot t+\left[(F_0/k)/\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)\right]\cdot\mathbf{sin}\,\omega\cdot t$

Versterkingsfactor VF: $VF=\left(1/1-(\omega/\omega_n)^2\right)$

Bij periodieke verplaatsing $\delta=\delta_0\cdot\mathbf{sin}\,\omega\cdot t$ (Overal F_0 vervangen door $k\cdot\delta_0$)

Viskeueze gedempte vrije trilling

Standaardvorm: $m\cdot\ddot{x}+c\cdot\dot{x}+k\cdot x=0$

Oplossingen (ABC): $r_{1,2}=-c/2m\pm\sqrt{(c/2m)^2-(k/m)}$

Kritische dempingscoëfficiënt: $c_k=2m\omega_n$ (bovenstaande wortel gelijk aan nul)

Sterke demping ($c>c_k$) : $x(t)=A\cdot e^{r_1 t}+B\cdot e^{r_2 t}$

Kritische demping ($c=c_k$): $x(t)=A\cdot e^{-\omega_n t}+B\cdot t\cdot e^{-\omega_n t}$

Zwakke demping ($c<c_k$): $x(t)=e^{(-c/2m)\cdot t}\cdot(A\cdot\mathbf{cos}\,\omega_d t+B\cdot\mathbf{sin}\,\omega_d t)$ of ook wel

Zwakke demping ($c<c_k$): $x(t)=D\cdot e^{(-c/2m)\cdot t}\cdot\mathbf{sin}(\omega_d t+\phi)$

Gedempte eigenhoekfrequentie: $\omega_d=\sqrt{(k/m)-(c/2m)^2}=\omega_n\cdot\sqrt{1-(c/c_k)^2}$

Dempingsverhouding (c/c_k) en periode $\tau_d=(2\pi/\omega_d)$

Viskeuze gedempte gedwongen trilling

Standaardvorm: $m\cdot\ddot{x}+c\cdot\dot{x}+k\cdot x=F_0\cdot\mathbf{sin}\,\omega t$

Standaardoplossing 1: $x_p(t)=A\cdot\mathbf{sin}\,\omega t+B\cdot\mathbf{cos}\,\omega t$ met

$$A=(F_0/m)\cdot(\omega_n^2-\omega^2)\Big/(\omega_n^2-\omega^2)^2+(c\omega/m)^2 \quad \text{en} \quad B=-F_0\cdot(c\omega/m^2)\Big/(\omega_n^2-\omega^2)^2+(c\omega/m)^2$$

Standaardoplossing 2: $x_p(t)=C\cdot\mathbf{sin}(\omega t-\phi)$ met

$$C=(F_0/k)\Big/\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left[2(c/c_k)(\omega/\omega_n)\right]^2} \quad \text{en} \quad \phi=\mathbf{tan}^{-1}\left[2(c/c_k)(\omega/\omega_n)/1-(\omega/\omega_n)^2\right]$$

Versterkingsfactor VF: $VF=1\Big/\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left[2(c/c_k)(\omega/\omega_n)\right]^2}$

Overige gegevens en homogene oplossing: Zie viskeuze gedempte vrije trilling

Homogene DV

$a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=0 \quad \rightarrow \quad ar^2+br+c=0$

r_1 en r_2 zijn reëel $\quad x(t)=A\cdot e^{r_1\cdot t}+B\cdot e^{r_2\cdot t}$

$r_1=r_2=r$ (reëel) $\quad x(t)=A\cdot e^{r_1\cdot t}+B\cdot t\cdot e^{r_2\cdot t}$

r_1 en r_2 zijn complex $\quad r=a\pm i\cdot b \quad x(t)=e^{at}(A\cdot\sin bt+B\cdot\cos bt)$

Vraag 1 (20 punten): Een massa wordt opgehangen aan een veer met veerstijfheid 10N/m en gaat trillen met een frequentie van 2Hz.
a) Bereken het gewicht van de massa met een nauwkeurigheid van 2 significante cijfers.
b) Op t=0 is de uitwijking 0.1m en de snelheid 1m/s, bepaal de uitwijking op tijdstip t=0.5s met een nauwkeurigheid van 2 significante cijfers.

Vraag 2 (10 punten): Bepaal de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$2\ddot{x}(t) + 8x(t) = 0$$

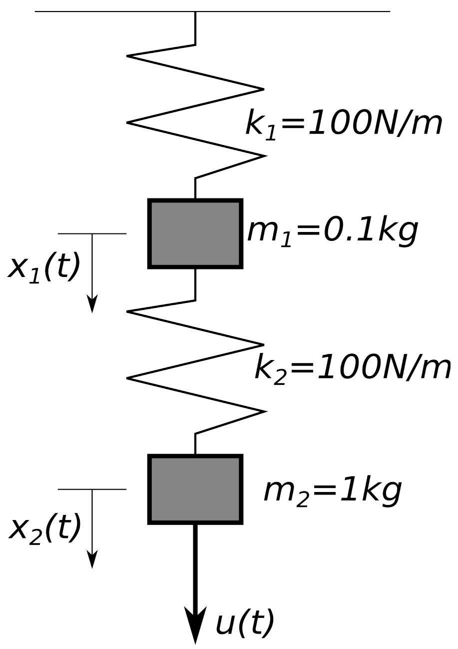
met de beginvoorwaarden $x(0) = 1$m en $\dot{x}(0) = 2$m/s. Schrijf de oplossing in de vorm:

$$x(t) = C\sin(\omega_n t + \phi)$$

Vraag 3 (30 punten): Een massa van 10kg is opgehangen aan 2 parallele veren in een smalle buis. Vanwege het gewicht van de massa worden de veren over 0.01m uitgerekt. De luchtverplaatsing in de buis zorgt voor een dempend effect dat overeenkomt met een visceuze demper met dempingsconstante van 1Ns/m.
a) Teken het vrije lichaamsschema (VLS) van de massa.
b) Bereken de differentiaalvergelijking die de beweging van de massa beschrijft als de massa in beweging wordt gebracht.
c) Laat met een berekening zien of we te maken hebben met een overgedempte, kritischgedempte of ondergedempte beweging van de massa.

Vraag 4 (30 punten): Veronderstel een model met een blok en een veer zoals in fig. 11.35a, maar zodanig dat het omlaag hangt en de ondersteuning een periodieke verplaatsing $\delta = \delta_0 \cos(\omega_0 t)$ heeft. Bepaal voor dat geval de bewegingsvergelijking voor het stelsel en de algemene oplossing. Definieer de verplaatsing *y*, gemeten vauit de statische evenwichtspositie van het blok op *t=0*.
Maak eerst een stappenplan voor de berekening en geef bij je uitwerking de stappen duidelijk aan (hier krijg je punten voor).

Vraag 5 (10 punten): Gegeven een gekoppeld massa-veer systeem met een krachtaanstoting *u(t)* zoals weergegeven in Figuur 1,



Figuur 1: Dubbel massa-veer systeem met krachtaanstoting, behorend bij vraag 5.

waarbij *$x_1(t)$* de positie van massa 1 ten opzichte van zijn evenwichtspunt en *$x_2(t)$* de positie van massa 2 ten opzicht van zijn evenwichtspunt. Met behulp van een VLS van massa 1 en een VLS van massa 2 kan worden aangetoond, dat de beweging van massa 1 en van massa 2 wordt bepaald door de volgende (gekoppelde) differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1(t) + k_1x_1(t) + k_2(x_1(t) - x_2(t)) &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2(t) + k_2(x_2(t) - x_1(t)) &= u(t) \end{aligned}$$

We willen het gedrag van dit systeem beschrijven met een toestandsmodel van de vorm:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= Aq(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cq(t) + Du(t) \end{aligned}$$

waarbij

$$q(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & \dot{x}_1(t) & x_2(t) & \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}^T$$

de toestandsvector en *$y(t)$* de uitgang. Het uitgangssignaal is gelijk aan de positie van massa 2, ofwel

$$y(t) = x_2(t)$$

Bepaal de matrix *A*, de vectoren *B* en *C* en de waarde van *D*.