Technology, Innovation & Society Delft

VOORBLAD SCHRIFTELIJKE TOETSEN

OPLEIDING	**: MECHATRONICA**
TOETSCODE	**: MECH5-T1**
GROEP	**: MEH2**
TOETSDATUM	**: 08/04/2013**
TIJD	**: 13.00 – 14.30**
AANTAL PAGINA'S (incl. voorblad)	**: 4**
DEZE TOETS BESTAAT UIT	**: 5 open vragen**
GEBRUIK HULPMIDDELEN	**: JA**
TOETSOPGAVE INLEVEREN	**: NEE**
TOEGESTANE HULPMIDDELEN	**: Een (grafische) rekenmachine**
OVERIGE OPMERKINGEN	**: Laat duidelijk zien met welke stappen je tot het antwoord bent gekomen! Het maximaal aantal behaalbare punten per vraag is bij elke vraag tussen haakjes aangegeven. Het eindcijfer wordt berekend met de volgende formule:** **Cijfer = max(1, aantal punten / 10)**
OPSTELLER VAN DEZE TOETS	**: P.R. Fraanje**
TWEEDE LEZER VAN DEZE TOETS	**: E.F. Erdurcan**

BELANGRIJKSTE PUNTEN UIT ARTIKEL 12 VAN DE ONDERWIJS- EN EXAMENREGELING:

- je dient je via Osiris ingeschreven te hebben voor deze toets
- schrijf je naam, je studentnummer, de toetscode en de naam van de docent meteen op het tentamenpapier
- leg je identiteitsbewijs op de hoek van de tafel
- zet alle elektronische communicatiemiddelen (mobiele telefoon, PDA, etc.) uit en stop deze in je tas; deze mogen niet als calculator of klok worden gebruikt
- je mag het lokaal het eerste halfuur niet verlaten
- volg de instructies op het toetsvoorblad
- steek je hand op als je een vraag hebt

FORMULEBLAD TRILLINGEN

Vrije Ongedempte Trilling

Standaardvorm: $\ddot{x}+\omega_n^2\cdot x=0$ met $\omega_n=\sqrt{k/m}$

Standaardoplossing 1: $x(t)=A\cdot\mathbf{sin}\,\omega_n\cdot t+B\cdot\mathbf{cos}\,\omega_n\cdot t$

Standaardoplossing 2: $x(t)=C\cdot\mathbf{sin}(\omega_n\cdot t+\phi)$ met $C=\sqrt{A^2+B^2}$ en $\phi=\mathbf{tan}^{-1}(B/A)$

Periode en Frequentie: $\tau=2\pi/\omega_n$ $\mathbf{[sec]}$ en $f=1/\tau$ $[\mathrm{Hz}]$

Ongedempte gedwongen trilling met periodieke kracht $F_0\cdot\mathbf{sin}\,\omega\cdot t$ (F_0 = mrω^2 bij onbalans)

Standaardvorm: $\ddot{x}+\omega_n^2\cdot x=(F_0/m)\cdot\mathbf{sin}\,\omega\cdot t$ met $\omega_n=\sqrt{k/m}$

Standaardoplossing: $x(t)=A\cdot\mathbf{sin}\,\omega_n\cdot t+B\cdot\mathbf{cos}\,\omega_n\cdot t+\left[(F_0/k)/\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)\right]\cdot\mathbf{sin}\,\omega\cdot t$

Versterkingsfactor VF: $VF=\left(1/1-(\omega/\omega_n)^2\right)$

Bij periodieke verplaatsing $\delta=\delta_0\cdot\mathbf{sin}\,\omega\cdot t$ (Overal F_0 vervangen door $k\cdot\delta_0$)

Viskeueze gedempte vrije trilling

Standaardvorm: $m\cdot\ddot{x}+c\cdot\dot{x}+k\cdot x=0$

Oplossingen (ABC): $r_{1,2}=-c/2m\pm\sqrt{(c/2m)^2-(k/m)}$

Kritische dempingscoëfficiënt: $c_k=2m\omega_n$ (bovenstaande wortel gelijk aan nul)

Sterke demping ($c>c_k$) : $x(t)=A\cdot e^{r_1t}+B\cdot e^{r_2t}$

Kritische demping ($c=c_k$): $x(t)=A\cdot e^{-\omega_nt}+B\cdot t\cdot e^{-\omega_nt}$

Zwakke demping ($c<c_k$): $x(t)=e^{(-c/2m)\cdot t}\cdot(A\cdot\mathbf{cos}\,\omega_dt+B\cdot\mathbf{sin}\,\omega_dt)$ of ook wel

Zwakke demping ($c<c_k$): $x(t)=D\cdot e^{(-c/2m)\cdot t}\cdot\mathbf{sin}(\omega_dt+\phi)$

Gedempte eigenhoekfrequentie: $\omega_d=\sqrt{(k/m)-(c/2m)^2}=\omega_n\cdot\sqrt{1-(c/c_k)^2}$

Dempingsverhouding (c/c_k) en periode $\tau_d=(2\pi/\omega_d)$

Viskeuze gedempte gedwongen trilling

Standaardvorm: $m\cdot\ddot{x}+c\cdot\dot{x}+k\cdot x=F_0\cdot\mathbf{sin}\,\omega t$

Standaardoplossing 1: $x_p(t)=A\cdot\mathbf{sin}\,\omega t+B\cdot\mathbf{cos}\,\omega t$ met

$$A=(F_0/m)\cdot(\omega_n^2-\omega^2)\Big/(\omega_n^2-\omega^2)^2+(c\omega/m)^2 \quad \text{en} \quad B=-F_0\cdot(c\omega/m^2)\Big/(\omega_n^2-\omega^2)^2+(c\omega/m)^2$$

Standaardoplossing 2: $x_p(t)=C\cdot\mathbf{sin}(\omega t-\phi)$ met

$$C=(F_0/k)\Big/\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left[2(c/c_k)(\omega/\omega_n)\right]^2} \quad \text{en} \quad \phi=\mathbf{tan}^{-1}\left[2(c/c_k)(\omega/\omega_n)/1-(\omega/\omega_n)^2\right]$$

Versterkingsfactor VF: $VF=1\Big/\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left[2(c/c_k)(\omega/\omega_n)\right]^2}$

Overige gegevens en homogene oplossing: Zie viskeuze gedempte vrije trilling

Homogene DV

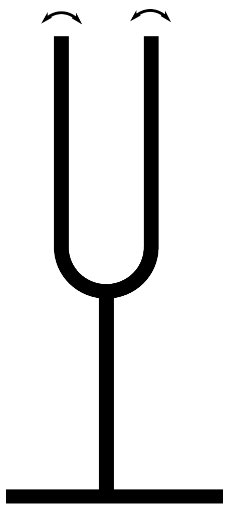
$a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=0 \rightarrow ar^2+br+c=0$

r_1 en r_2 zijn reëel $\quad x(t)=A\cdot e^{r_1\cdot t}+B\cdot e^{r_2\cdot t}$

$r_1=r_2=r$ (reëel) $\quad x(t)=A\cdot e^{r_1\cdot t}+B\cdot t\cdot e^{r_2\cdot t}$

r_1 en r_2 zijn complex $\quad r=a\pm i\cdot b \quad x(t)=e^{at}(A\cdot\sin bt+B\cdot\cos bt)$

Vraag 1 (20 punten): Een goede stemvork (zie Figuur 1) heeft vrijwel geen demping en trilt vrij met een frequentie van 440Hz, de frequentie die hoort bij de toon a'. Verwaarlozen we de demping, dan kan de trilling van de stemvork worden beschreven door de trilling van een massa-veer systeem.
a) Gegeven is dat de stijfheid van de stemvork gelijk is aan die van een veer met een veerconstante 10^5N/m, bereken het gewicht van de bewegende massa.
b) Gegeven is verder, dat op tijdstip t=0s, de bewegende massa precies door het evenwichtspunt gaat met een snelheid van 1m/s. Bereken de amplitude van de trilling in 2 significante cijfers nauwkeurig.



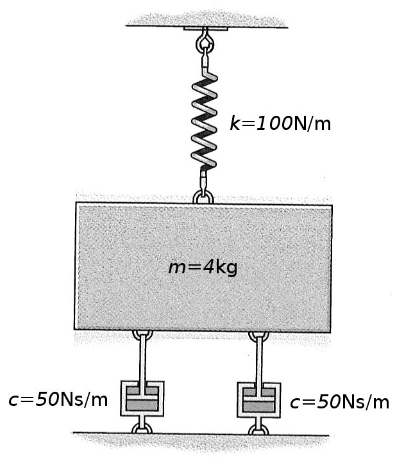
Figuur 1: Schematische weergave van een stemvork.

Vraag 2 (10 punten): De trilling van een massa wordt gegeven door de volgende uitdrukking:

$$x(t) = 3\cos(t) + 4\sin(t)$$

a) Bereken de amplitude van de trilling.
b) Bereken de fase van de trilling op tijdstip t=0s.

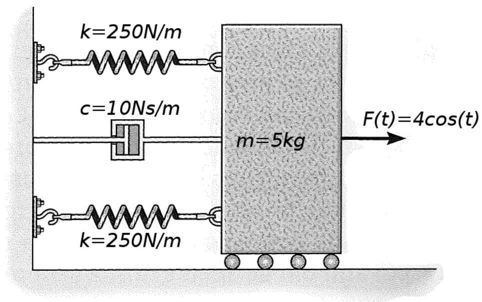
Vraag 3 (30 punten): Figuur 2 toont een massa van $m=4$kg welke is opgehangen aan een veer met veerconstante $k=100$N/m. De beweging van de massa wordt gedempt met twee parallele dempers die elk een dempingsconstante van $c=50$Ns/m hebben.



Figuur 2: Massa opgehangen aan een veer en gedempt door twee dempers.

a) Teken het vrije lichaamsschema (VLS) van de massa.
b) Bereken de differentiaalvergelijking van de beweging van de massa.
c) Laat met een berekening zien of we te maken hebben met een overgedempte, kritischgedempte of ondergedempte beweging van de massa.

Vraag 4 (30 punten): Figuur 3 toont een massa van *m=5*kg die (bij benadering) wrijvingsloos kan bewegen over een oppervlak. De massa is bevestigd aan de vaste wereld door middel van twee veren met elk een veerconstante van *k=250*N/m en een demper met dempingsconstante *c=10*Ns/m. Op de massa werkt een periodieke kracht van *F(t)=4cos(t)*.



Figuur 3: Gedwongen massa-veer-demper systeem behorende bij vraag 4.

Na enige tijd is de invloed van de beginpositie en -snelheid van de massa te verwaarlozen en wordt de beweging van de massa gegeven door

$$x(t) = Acos(t - \phi)$$

Bereken de waarde van de amplitude *A* en de faseverschuiving ϕ in twee significante cijfers nauwkeurig. Geef in je antwoord eerst een stappenplan voor de berekening (hier krijg je punten voor!), en geef elke stap duidelijk aan in je verdere uitwerking.

Vraag 5 (10 punten): Gegeven een massa-veer-demper systeem met een krachtaanstoting. De positie van de massa wordt bepaald door de volgende differentiaalvergelijking

$$2\ddot{x}(t) + 1\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t)$$

waarbij *x(t)* de positie van de massa en *u(t)* de kracht aanstoting. We willen het gedrag van dit systeem beschrijven met een toestandsmodel van de vorm:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= Aq(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cq(t) + Du(t) \end{aligned}$$

waarbij *q(t)* de toestandsvector en *y(t)* de uitgang. Het uitgangssignaal is gelijk aan de snelheid van de massa, ofwel

$$y(t) = \dot{x}(t)$$

Bepaal de matrix *A*, de vectoren *B* en *C* en de waarde van *D*, geef ook aan wat de elementen van de toestandsvector *q(t)* zijn.