DE HAAGSE HOGESCHOOL

Technology, Innovation & Society Delft

VOORBLAD SCHRIFTELIJKE TOETSEN

OPLEIDING	**: MECHATRONICA**
TOETSCODE	**: MECH5-T1**
GROEP	**: MEH2**
TOETSDATUM	**: 22/04/2013**
TIJD	**: 13.00 – 14.30**
AANTAL PAGINA'S (incl. voorblad)	**: 4**
DEZE TOETS BESTAAT UIT	**: 5 open vragen**
GEBRUIK HULPMIDDELEN	**: JA**
TOETSOPGAVE INLEVEREN	**: NEE**
TOEGESTANE HULPMIDDELEN	**: Een (grafische) rekenmachine**
OVERIGE OPMERKINGEN	**:Bereken je antwoorden in 2 significante cijfers nauwkeurig, tenzij anders aangegeven. Laat duidelijk zien met welke stappen je tot het antwoord bent gekomen! Het maximaal aantal behaalbare punten per vraag is bij elke vraag tussen haakjes aangegeven. Het eindcijfer wordt berekend met de volgende formule:** **Cijfer = max(1, aantal punten / 10)**
OPSTELLER VAN DEZE TOETS	**: P.R. Fraanje**
TWEEDE LEZER VAN DEZE TOETS	**: D.E.T. Tiemens**

BELANGRIJKSTE PUNTEN UIT ARTIKEL 12 VAN DE ONDERWIJS- EN EXAMENREGELING:

- je dient je via Osiris ingeschreven te hebben voor deze toets
- schrijf je naam, je studentnummer, de toetscode en de naam van de docent meteen op het tentamenpapier
- leg je identiteitsbewijs op de hoek van de tafel
- zet alle elektronische communicatiemiddelen (mobiele telefoon, PDA, etc.) uit en stop deze in je tas; deze mogen niet als calculator of klok worden gebruikt
- je mag het lokaal het eerste halfuur niet verlaten
- volg de instructies op het toetsvoorblad
- steek je hand op als je een vraag hebt

FORMULEBLAD TRILLINGEN

Vrije Ongedempte Trilling

Standaardvorm: $\ddot{x}+\omega_n^2\cdot x=0$ met $\omega_n=\sqrt{k/m}$

Standaardoplossing 1: $x(t)=A\cdot\mathbf{sin}\,\omega_n\cdot t+B\cdot\mathbf{cos}\,\omega_n\cdot t$

Standaardoplossing 2: $x(t)=C\cdot\mathbf{sin}(\omega_n\cdot t+\phi)$ met $C=\sqrt{A^2+B^2}$ en $\phi=\mathbf{tan}^{-1}(B/A)$

Periode en Frequentie: $\tau=2\pi/\omega_n$ $\mathbf{[sec]}$ en $f=1/\tau$ $[\mathrm{Hz}]$

Ongedempte gedwongen trilling met periodieke kracht $F_0\cdot\mathbf{sin}\,\omega\cdot t$ (F_0 = mrω^2 bij onbalans)

Standaardvorm: $\ddot{x}+\omega_n^2\cdot x=(F_0/m)\cdot\mathbf{sin}\,\omega\cdot t$ met $\omega_n=\sqrt{k/m}$

Standaardoplossing: $x(t)=A\cdot\mathbf{sin}\,\omega_n\cdot t+B\cdot\mathbf{cos}\,\omega_n\cdot t+\left[(F_0/k)/\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)\right]\cdot\mathbf{sin}\,\omega\cdot t$

Versterkingsfactor VF: $VF=\left(1/1-(\omega/\omega_n)^2\right)$

Bij periodieke verplaatsing $\delta=\delta_0\cdot\mathbf{sin}\,\omega\cdot t$ (Overal F_0 vervangen door $k\cdot\delta_0$)

Viskeueze gedempte vrije trilling

Standaardvorm: $m\cdot\ddot{x}+c\cdot\dot{x}+k\cdot x=0$

Oplossingen (ABC): $r_{1,2}=-c/2m\pm\sqrt{(c/2m)^2-(k/m)}$

Kritische dempingscoëfficiënt: $c_k=2m\omega_n$ (bovenstaande wortel gelijk aan nul)

Sterke demping ($c>c_k$) : $x(t)=A\cdot e^{r_1 t}+B\cdot e^{r_2 t}$

Kritische demping ($c=c_k$): $x(t)=A\cdot e^{-\omega_n t}+B\cdot t\cdot e^{-\omega_n t}$

Zwakke demping ($c<c_k$): $x(t)=e^{(-c/2m)\cdot t}\cdot(A\cdot\mathbf{cos}\,\omega_d t+B\cdot\mathbf{sin}\,\omega_d t)$ of ook wel

Zwakke demping ($c<c_k$): $x(t)=D\cdot e^{(-c/2m)\cdot t}\cdot\mathbf{sin}(\omega_d t+\phi)$

Gedempte eigenhoekfrequentie: $\omega_d=\sqrt{(k/m)-(c/2m)^2}=\omega_n\cdot\sqrt{1-(c/c_k)^2}$

Dempingsverhouding (c/c_k) en periode $\tau_d=(2\pi/\omega_d)$

Viskeuze gedempte gedwongen trilling

Standaardvorm: $m\cdot\ddot{x}+c\cdot\dot{x}+k\cdot x=F_0\cdot\mathbf{sin}\,\omega t$

Standaardoplossing 1: $x_p(t)=A\cdot\mathbf{sin}\,\omega t+B\cdot\mathbf{cos}\,\omega t$ met

$$A=(F_0/m)\cdot(\omega_n^2-\omega^2)\Big/(\omega_n^2-\omega^2)^2+(c\omega/m)^2 \quad \text{en} \quad B=-F_0\cdot(c\omega/m^2)\Big/(\omega_n^2-\omega^2)^2+(c\omega/m)^2$$

Standaardoplossing 2: $x_p(t)=C\cdot\mathbf{sin}(\omega t-\phi)$ met

$$C=(F_0/k)\Big/\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left[2(c/c_k)(\omega/\omega_n)\right]^2} \quad \text{en} \quad \phi=\mathbf{tan}^{-1}\left[2(c/c_k)(\omega/\omega_n)/1-(\omega/\omega_n)^2\right]$$

Versterkingsfactor VF: $VF=1\Big/\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left[2(c/c_k)(\omega/\omega_n)\right]^2}$

Overige gegevens en homogene oplossing: Zie viskeuze gedempte vrije trilling

Homogene DV

$a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=0 \rightarrow ar^2+br+c=0$

r_1 en r_2 zijn reëel $x(t)=A\cdot e^{r_1\cdot t}+B\cdot e^{r_2\cdot t}$

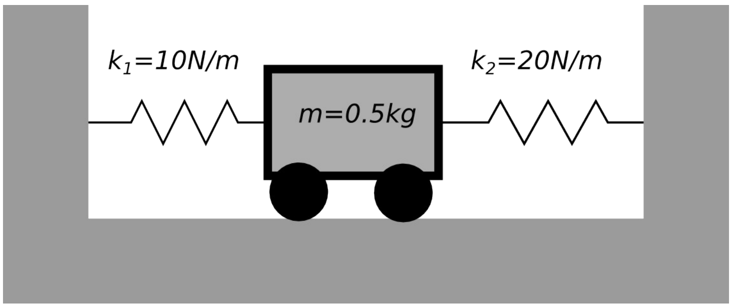
$r_1=r_2=r$ (reëel) $x(t)=A\cdot e^{r_1\cdot t}+B\cdot t\cdot e^{r_2\cdot t}$

r_1 en r_2 zijn complex $r=a\pm i\cdot b$ $x(t)=e^{at}(A\cdot\sin bt+B\cdot\cos bt)$

NB: Bij vragen waarin een numeriek antwoord wordt gevraagd, moet deze met een nauwkeurigheid van 2 significante cijfers worden gegeven, tenzij anders aangegeven.

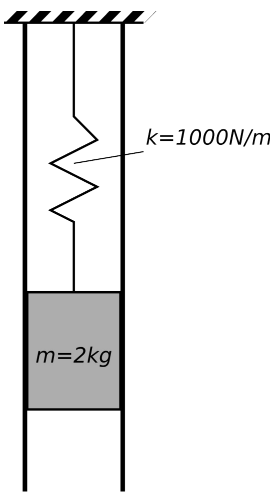
Vraag 1 (20 punten): Een massa van $m=1$kg wordt aan een veer opgehangen, en krijgt op $t=0$s een uitwijking van 0.1m ten opzichte van het evenwichtspunt en zal ongedempt blijven trillen. De snelheid op t=0 is 0m/s. De trillingsfrequentie is $f=2$Hz.
a) Bereken de stijfheid van de veer.
b) Bereken de maximale snelheid van de massa.

Vraag 2 (10 punten): Figuur 1 toont een karretje met een massa van 0.5kg die wrijvingsloos heen en weer kan bewegen. Om te voorkomen dat het karretje volledig ongecontrolleerd zal bewegen, is het door middel van twee veren vastgebonden aan de vaste wereld. De ene veer heeft een stijfheid van 10N/m en de andere een stijfheid van 20N/m. Op $t=0$s wordt de massa op 0.1m rechts van het evenwichtspunt losgelaten.
Bereken de periodetijd van de trilling (herinner: nummerieke antwoorden in 2 significante cijfers).



Figuur 1: Een karretje door twee veren verbonden aan de vaste wereld (vraag 2).

Vraag 3 (30 punten): Een massa van 2kg is opgehangen aan een veer met stijfheid 1000N/m en kan bewegen langs een rechte geleider, een zogenaamde rechtgeleider, zie Figuur 2. Vanwege de wrijving langs de rechtgeleider wordt de beweging van de massa gedempt; deze demping heeft het gedrag van een visceuze demper met dempingsconstante 10Ns/m. De positie van de massa ten opzichte van het evenwichtspunt wordt aangeduid met het symbool y, de positieve richting is omlaag gericht.



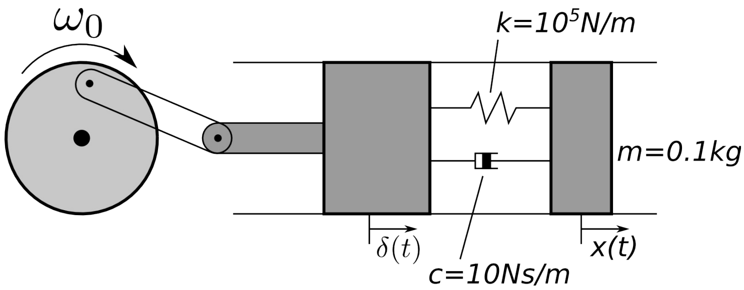
Figuur 2: Massa die beweegt in een rechtgeleiding en is opgehangen aan een veer (vraag 3).

a) Teken het vrije lichaamsschema (VLS) van de massa en geef de grootte van de verschillende krachten.
b) Bepaal de differentiaalvergelijking die de beweging van de massa beschrijft als de massa in beweging wordt gebracht.
c) Laat met een berekening zien of we te maken hebben met een overgedempte, kritischgedempte of ondergedempte beweging van de massa.

Vraag 4 (30 punten): Een motor met een constante hoekfrequentie van $\omega_0$rad/s (stationair bedrijf) drijft een cylinder aan die via een veer en een demper is gekoppeld met een tweede cylinder, welke een massa van $m=0.1$kg heeft, zie Figuur 3. De veer heeft een stijfheid $k=10^5$N/m, en de demper een dempingsconstante van $c=10$Ns/m. De beweging (in m) van de linker cylinder, die aangedreven wordt door de motor wordt gegeven door:

$$\delta(t) = 0.01\sin(\omega_0 t)$$

De resulterende verplaatsing van de rechter cylinder wordt aangegeven met *x(t).*
a) Bepaal de verplaatsing van de rechter cylinder *x(t),* neem aan dat het effect van begincondities verwaarloosbaar is.
b) Bij welk toerental is de amplitude van de beweging van de rechter cylinder maximaal? (Bereken je antwoord in 4 significante cijfers nauwkeurig.)
c) Bij welk toerental is het fase-verschil tussen de linker en de rechter cylinder gelijk aan 120°? (Bereken je antwoord in 4 significante cijfers nauwkeurig.)



Figuur 3: Aandrijving van een cylinder via een flexibele koppeling (vraag 4).

Vraag 5 (10 punten): Gegeven een massa-veer-demper systeem met een krachtaanstoting. De positie van de massa wordt bepaald door de volgende differentiaalvergelijking

$$2\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 4x(t) = u(t)$$

waarbij *x(t)* de positie van de massa en *u(t)* de krachtaanstoting. We willen het gedrag van dit systeem beschrijven met een toestandsmodel van de vorm:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= Aq(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cq(t) + Du(t) \end{aligned}$$

waarbij *q(t)* de toestandsvector en *y(t)* de uitgang. Het uitgangssignaal is gelijk aan het verschil tussen de positie van de massa en 0.1 maal de krachtaanstoting *u(t)*, ofwel

$$y(t) = x(t) - 0.1u(t)$$

Bepaal de matrix *A*, de vectoren *B* en *C* en de waarde van *D*, geef ook aan wat de elementen van de toestandsvector *q(t)* zijn.