VOORBLAD SCHRIFTELIJKE TOETSEN

OPLEIDING	**Me**
TOETSCODE	**MeWIS4-T2**
GROEP	**MeP2**
TOETSDATUM	**1 juli 2013**
TIJD	**11.00 – 12.30 uur**
AANTAL PAGINA'S (incl. dit voorblad)	**4**
DEZE TOETS BESTAAT UIT (aantal)	**6 open vragen**
GEBRUIK HULPMIDDELEN **TOEGESTANE HULPMIDDELEN**	**JA/~~NEE~~** **Een grafische rekenmachine**
TOETSOPGAVE INLEVEREN	**NEE**
OVERIGE OPMERKINGEN	**Laat je berekeningen zien!** **Alleen een antwoord is geen punten waard!** **Geef altijd exacte antwoorden tenzij anders vermeld in de vraag!** **Cijfer = totaal punten/10** **met minimum 1**
OPSTELLER VAN DEZE TOETS	**Wim Keereweer**
NAAM 2E LEZER	**Roel Smit**

Belangrijkste punten uit artikel 12 van de Onderwijs- en examenregeling:

- Je dient je via Osiris ingeschreven te hebben voor de toets
- Schrijf je naam, studentnummer, toetscode en naam van de docent meteen op het tentamenpapier
- Leg je identificatiebewijs op de hoek van de tafel
- Zet alle elektronische communicatiemiddelen (mobiel, PDA, etc.) uit en stop deze in je tas; deze mogen niet als calculator of klok worden gebruikt
- Je mag het lokaal het eerste halfuur niet verlaten
- Volg de instructies op het toetsvoorblad
- Steek je hand op als je een vraag hebt

Machten:

voor alle $a, b > 0$ geldt:

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$
$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$
$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$
$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$
$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$
$$(a^p)^q = a^{pq}$$

Logaritmen:

Voor alle $g > 0$ en $g \neq 1$ en alle $a, b > 0$ geldt:

$$^g\log ab = {}^g\log a + {}^g\log b$$
$$^g\log \frac{a}{b} = {}^g\log a - {}^g\log b$$
$$^g\log a^q = q \cdot {}^g\log a \ (q \in \mathbb{R})$$
$$^g\log a = \frac{^p\log a}{^p\log g} \ (p > 0 \text{ en } p \neq 1)$$

ABC-formule

Het oplossen van $ax^2 + bx + c = 0$, waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$.

Discriminant $D = b^2 - 4ac$.

Als $D \geq 0$ dan $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Als $D < 0$ dan geen reële oplossingen.

Goniometrische formules

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\sin x = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$$
$$\cos x = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos x \pm \cos x \cdot \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$$
$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$$
$$\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 - 1$$
$$= 1 - 2(\sin x)^2$$
$$(\cos x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
$$(\sin x)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)$$
$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$
$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$
$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

Goniometrische vergelijkingen

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k \cdot 2\pi \vee x$$
$$= \pi - \alpha + k \cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$
$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k \cdot 2\pi \vee x$$
$$= -\alpha + k \cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$
$$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k \cdot \pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Cyclometrische functies

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x \text{ en } y \in \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$$
$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x \text{ en } y \in [0, \pi]$$
$$y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x \text{ en } y \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$$

Graden en Radialen

$$\alpha \text{ rad} \triangleq \left(\alpha \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ \quad \alpha^\circ \triangleq \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

Cosinus en sinusregel

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Differentiaalrekening

Rekenregels

$$\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x) \text{ met } c \in \mathbb{R}$$

$$\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)' = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \text{ met } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$f\left(g(x)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

Standaardafgeleiden

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = x^\alpha \Rightarrow f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \text{ met } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = {}^a\log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Integraalrekening

Rekenregels

$$\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_{x=a}^b f(x) dg(x) = [f(x)g(x)]_{x=a}^b - \int_{x=a}^b g(x) df(x)$$

Standaard integralen

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \text{ met } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \text{ met } a > 0 \text{ en } a \neq -1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Complexe getallen

Drie schrijfwijzen voor een complex getal:

1. $z = x + iy$
2. $z = r(\cos\phi + i \sin\phi)$ met $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

   en $\tan\phi = y/x$
3. $z = re^{i\phi}$, $e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi$ (Euler)

Rekenen met complexe getallen

Stel $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Stel $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$ en $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$$

Het oplossen van vergelijkingen in $\mathbb{C}$

1. $az^2 + bz + c = 0$ met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$

   Discriminant $D = b^2 - 4ac$

   a. $D \geq 0$ dan $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

   b. $D < 0$ dan $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$
2. $z^n = c$ met $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ en $c \in \mathbb{C}$:

   $z_k = \sqrt[n]{|c|} e^{i\left(\frac{\arg(c)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k = 0$ t/m $n - 1$

Vraag 1: **(10+10 PUNTEN)**

Controleer dat de algemene oplossing voldoet aan de differentiaalvergelijking ($C \in \mathbb{R}$):

	Algemene oplossing	**Differentiaalvergelijking**
a)	$y = C \cdot e^{-x} \cdot \cos(x)$	$\frac{dy}{dx} = -y \cdot (1 + \tan(x))$
b)	$y^2 = Cx^2 + 2x$	$xy\frac{dy}{dx} = y^2 - x$

Vraag 2: **(10 PUNTEN)**

Teken het richtingsveld van de volgende differentiaalvergelijking. Teken hierbij drie isoclinen waarvan de helling van het raaklijnelement gelijk is aan 1, −1 en $\frac{1}{2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Vraag 3: **(10+5 PUNTEN)**

a Bepaal de algemene oplossing van de volgende differentiaalvergelijking.
b Bepaal de particuliere oplossing met y(1) = 0.
Herleid totdat de afhankelijke variabele 'vrij' is.

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 1}{\sqrt{x}}$$

Vraag 4: **(5+10 PUNTEN)**

a Geef de karakteristieke vergelijking en de homogene oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking.
b Bepaal daarna een ***particuliere*** oplossing bij de gegeven differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dx} + y = 2e^{-2x}$$

Vraag 5: **(20 PUNTEN)**

Bepaal de algemene oplossing van de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dx} - y \cdot \sin(x) = \sin(x)$$

Vraag 6: **(20 PUNTEN)**

Bepaalde wijn is goed drinkbaar als deze een temperatuur heeft van 16°C. De wijn wordt op $t = 0$ uit de koelkast gehaald die een temperatuur heeft van 6°C. Doordat de omgevingstemperatuur is 26°C is wordt de wijn warmer: na 30 minuten is de wijn 16°C.

a Stel een differentiaalvergelijking op voor de temperatuur T(t) van de wijn.
b Los de differentiaalvergelijking op, verwerk de gegevens daarbij.
<u>Voor zover nodig</u> geef je je antwoord in 2 significante cijfers.